

一类具有疫苗接种且潜伏期传染的 SVEIAR 腮腺炎传染病模型*

蒋为平, 张太雷, 刘宗萱, 曹欢

长安大学理学院, 陕西 西安 710064

摘要: 根据已知的腮腺炎传播机制, 本文运用常微分方程定性与稳定性理论, 建立了一类具有疫苗接种且潜伏期传染的 SVEIAR 腮腺炎传染病模型, 得出了模型的基本再生数. 给出了平衡点的存在性并得到了当 $\mathcal{R}_0 \leq 1$ 时, 无病平衡点全局渐近稳定; 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 无病平衡点不稳定且地方病平衡点全局渐近稳定. 选取江苏省腮腺炎患者病例数据, 应用模型模拟了腮腺炎未来几年的流行趋势. 敏感性分析显示, 疫苗接种是影响腮腺炎的非常重要的因素. 提高公众对腮腺炎的防范意识、制定有效的疫苗接种策略、加强锻炼能够提升机体素质以及免疫功能, 从而预防腮腺炎的发生, 进而控制腮腺炎的持续蔓延.

关键词: SVEIAR 模型; 基本再生数; 稳定性; 数值模拟

中图分类号: O175.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137 (2025) 02-0148-12

An SVEIAR mumps infection model with vaccination and latent infection

JIANG Weiping, ZHANG Tailei, LIU Zongxuan, CAO Huan

School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China

Abstract: According to the known mechanism of mumps transmission, a SVEIAR mumps infectious disease model with vaccination and incubation period was established by using the qualitative and stability theory of ordinary differential equation, and the basic regeneration number of the model was obtained. The existence of the equilibrium points is given and it is found that the disease-free equilibrium point is globally asymptotically stable when $\mathcal{R}_0 \leq 1$; the disease-free equilibrium point is unstable and the endemic equilibrium point is globally asymptotically stable when $\mathcal{R}_0 > 1$. The case data of mumps patients in Jiangsu Province is collected to simulate the epidemic trend of mumps in the next few years. Finally, the sensitivity analysis of parameters shows that the incidence of mumps will continue to increase in recent years. Improving public awareness preventing mumps, developing effective vaccination strategies and strengthening physical exercise can improve the body quality and immune function, so as to prevent the occurrence of mumps, and then control the spread of mumps.

Key words: SVEIAR model; basic reproduction number; stability; numerical simulation

流行性腮腺炎(简称“流腮”)是一种由腮腺炎病毒(MuV, mumps virus)、细菌等侵入人体所导致的一种常见儿童传染病, 大多数感染是以飞沫形式经由呼吸道传播、接触被病毒污染的物品传播、母婴(垂直)

*收稿日期: 2024-04-01

录用日期: 2024-05-15

网络首发日期: 2024-08-28

基金项目: 陕西省自然科学基金(2022JM-023)

作者简介: 蒋为平(1998年生), 女; 研究方向: 传染病动力学; E-mail: jwp19980202@163.com

通信作者: 张太雷(1980年生), 男; 研究方向: 生物数学; E-mail: tlzhang@chd.edu.cn

全文阅读



ZR20240093

传播而产生的. 流腮病毒是一种 RNA 型病毒, 属于副黏液病毒科, 一般经由口、鼻侵入机体, 在呼吸道黏膜上皮细胞内复制后进入血液, 进而扩散到腮腺等器官, 大量复制后再次进入血液, 形成第二次病毒血症, 经由血液侵入神经组织、胰腺、睾丸、心肌等器官, 主要临床症状表现为发热、头痛、乏力、腮腺非化脓性肿痛, 可引起病毒性脑膜炎、心肌炎、卵巢炎等并发症, 甚至会导致不孕不育、死亡等严重后果(殷秀岩等,2023). 在国家卫生健康委员会疾病预防控制局发布的 2021 年全国法定传染病疫情概况中, 流腮病例高达 119 955 例, 居丙类传染病发病数前 4 位. 同时, 全球发达国家流腮的发病情况大多处在较高水平, 特别是由某些流腮炎疫苗株引起的无菌性脑膜炎病例再次出现、疫苗接种后保护功能弱化, 给社会和家庭造成了严重经济负担, 因此流腮防控依旧是亟需解决的公共卫生难题之一(Su et al., 2020).

近年来, 腮腺炎的传播机制受到了国内外众多学者的关注(Anderson et al., 1987; Donaghy et al., 2006; Fanoy et al., 2011; Duru et al., 2023; 盖相臻, 2023; Mohana et al., 2023). Rubin et al.(2015)指出, 约为 1/3~1/2 的感染者是无症状的, 或者只导致轻微的呼吸道症状, 有时伴有发烧. Eckalbar et al.(2015)表明受感染患者在出现临床症状前 1~2 d 内传染性最强, 并在出现临床症状后持续数天传播病毒. 因此, 潜伏期传播和无症状传播是腮腺炎病毒传播重要特征之一.

经过与传染病的长期斗争, 人类探究出预防传染病的有效措施之一——预防接种. 预防接种是将疫苗接种在健康人群体内使其获得特定性免疫, 是控制甚至消灭传染病的有效方式. 目前, 疫苗接种在各类传染病的研究中广泛应用(Scherer et al., 2002; Sepulveda et al., 2023). Attaullah et al.(2022)研究了一类具有非线性饱和发生率 and 疫苗接种率的 SVIR 模型, 期间采用欧拉和欧拉修正技术对模型进行求解, 结果表明建立的近似求解方法的 SVIR 模型是准确有效的. 高文哲等(2022)建立了一类具有双接种和病毒自发变异的传染病模型, 证明了平衡点全局渐近稳定的充分条件.Vijayalakshmi et al.(2023)提出了一种新型分数阶微分积分的流行病学控制模型, 通过非线性泛函分析和二分算子研究了系统的稳定性, 得出了有效的疫苗接种控制机制. 在现实生活中, 疫苗接种和潜伏期传染等因素会同时出现在疾病传播过程中, 而相关学者还未将这些因素综合考虑在腮腺炎病毒的研究工作内, 因此我们将这些因素引入到动力学建模中, 建立具有疫苗接种且潜伏期传染的腮腺炎模型, 得出相关参数的具体影响因子, 从而更好地采取相关控制措施.

1 模型建立

将某一区域 t 时刻内的总人口数 $N(t)$ 分为易感者 $S(t)$ 、接种者 $V(t)$ 、潜伏者 $E(t)$ 、有症状感染者 $I(t)$ 、无症状感染者 $A(t)$ 、恢复者 $R(t)$, 建立了一类具有疫苗接种且潜伏期传染的腮腺炎传染病模型. 模型传播机制如图 1 所示.

根据模型的传播机制图, 可以看出 R 仅与 I 和 A 有关, 因此 R 仓室的相关方程可以先不予考虑, 于是得到如下的常微分方程模型:

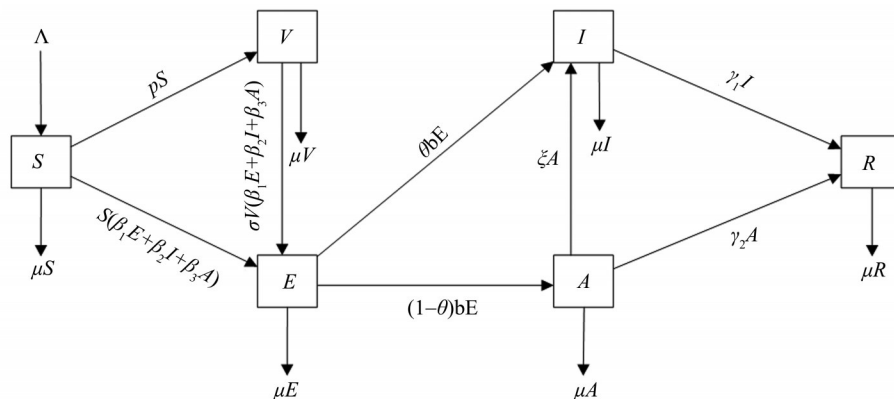


图 1 一类 SVEIAR 腮腺炎模型传播机制图

Fig. 1 An SVEIAR model of mumps transmission mechanism diagram

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - (\beta_1 E + \beta_2 I + \beta_3 A)S - (\mu + p)S, \\ V'(t) = pS - (\beta_1 E + \beta_2 I + \beta_3 A)\sigma V - \mu V, \\ E'(t) = (\beta_1 E + \beta_2 I + \beta_3 A)(S + \sigma V) - (\mu + b)E, \\ I'(t) = \theta bE + \xi A - (\mu + \gamma_1)I, \\ A'(t) = (1 - \theta)bE - (\mu + \gamma_2 + \xi)A, \end{cases} \quad (1)$$

其中 Λ 表示人口输入率; β_1 、 β_2 、 β_3 分别表示易感人群与潜伏者、有症状感染者和无症状感染者接触的传染率; μ 表示死亡率; p 表示疫苗接种率; σ 表示接种者感染率调节因子, $\sigma = 0$ 表示接种者对疾病完全免疫, $\sigma = 1$ 表示疫苗完全失效, 现在假设疫苗部分免疫, 即 $0 < \sigma < 1$; b 表示潜伏者转化为感染者的几率; θ 表示潜伏者转化为染病者中有症状感染者所占比例; γ_1 、 γ_2 分别表示有症状感染者和无症状感染者恢复率; ξ 表示无症状感染者转化为有症状感染者的几率. 观察中国疾病预防控制中心公布的现有数据, 腮腺炎致死率非常低, 等同于普通感冒, 因此在模型建立时未考虑因病死亡率.

不难看出, 模型(1)的解满足非负性, 且满足

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N.$$

由常微分方程的基本定理(马知恩等, 2015)可得出模型(1)的最大正向不变集为

$$\Omega = \left\{ (S, V, E, I, A) \in \mathbb{R}_+^5 \mid S + V + E + I + A \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}.$$

接下来将在不变集 Ω 中讨论模型(1)的动力学性质.

2 平衡点的存在性

在研究模型(1)的动力学性质之前应先确定平衡点, 因此本节将探讨平衡点的存在性.

当疾病消亡时, 模型(1)总存在对应的无病平衡点 $P^0(S^0, V^0, 0, 0, 0)$, 其中

$$S^0 = \frac{\Lambda}{\mu + p}, \quad V^0 = \frac{p\Lambda}{\mu(\mu + p)}.$$

利用再生矩阵方法(van den Driessche et al., 2002), 得到模型(1)的基本再生数

$$\mathcal{R}_0 = \frac{(S^0 + \sigma V^0)[\beta_1(\mu + \gamma_1)(\mu + \gamma_2 + \xi) + \beta_2 b(\xi + \theta\mu + \theta\gamma_2) + \beta_3(1 - \theta)b(\mu + \gamma_1)]}{(\mu + b)(\mu + \gamma_1)(\mu + \gamma_2 + \xi)}.$$

接下来讨论地方病平衡点的存在性. 设 $P^*(S^*, V^*, E^*, I^*, A^*)$ 为模型(1)的地方病平衡点, 且满足下列方程

$$\begin{cases} \Lambda - (\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 A^*)S^* - (\mu + p)S^* = 0, \\ pS^* - (\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 A^*)\sigma V^* - \mu V^* = 0, \\ (\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 A^*)(S^* + \sigma V^*) - (\mu + b)E^* = 0, \\ \theta bE^* + \xi A^* - (\mu + \gamma_1)I^* = 0, \\ (1 - \theta)bE^* - (\mu + \gamma_2 + \xi)A^* = 0. \end{cases} \quad (2)$$

令

$$\begin{aligned} A &= \beta_1(\mu + \gamma_1)(\mu + \gamma_2 + \xi) + \beta_2 b(\xi + \theta\mu + \theta\gamma_2) + \beta_3(1 - \theta)b(\mu + \gamma_1), \\ B &= (\mu + b)(\mu + \gamma_1)(\mu + \gamma_2 + \xi). \end{aligned}$$

由方程(2)可知

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\Lambda}{\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 A^* + (\mu + p)}, & V^* &= \frac{p\Lambda}{[\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 A^* + (\mu + p)][(\beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 A^*)\sigma + \mu]}, \\ A^* &= \frac{(1 - \theta)b}{\mu + \gamma_2 + \xi} E^*, & \beta_1 E^* + \beta_2 I^* + \beta_3 A^* &= \frac{A(\mu + b)}{B} E^*. \end{aligned} \quad (3)$$

由于 $E^* \neq 0$, 由方程(2)的第3个式子可知

$$S^* + \sigma V^* = \frac{B}{A}. \quad (4)$$

联合式(3)和式(4), 可得

$$S^* + \sigma V^* = \frac{\Lambda B}{A(\mu + b)E^* + (\mu + p)B} \cdot \frac{A(\mu + b)\sigma E^* + (\mu + \sigma p)B}{A(\mu + b)\sigma E^* + \mu B}. \quad (5)$$

再由式(4)~(5)得

$$H(E^*) = \frac{B[A(\mu + b)\sigma E^* + (\mu + \sigma p)B]}{[A(\mu + b)E^* + (\mu + p)B][A(\mu + b)\sigma E^* + \mu B]} - \frac{B}{A\Lambda} = 0. \quad (6)$$

对式(6)关于 E^* 求导可得

$$H'(E^*) = \frac{H_1(E^*)}{\left\{ [A(\mu + b)E^* + (\mu + p)B][A(\mu + b)\sigma E^* + \mu B] \right\}^2}.$$

令 $A(\mu + b) = C$, 则

$$\begin{aligned} H_1(E^*) &= \sigma BC[CE^* + (\mu + p)B](\sigma CE^* + \mu B) - BC[\sigma CE^* + (\mu + \sigma p)B]\{\sigma CE^* + \mu B + \sigma[CE^* + (\mu + p)B]\} \\ &= -BC\{(\sigma C)^2 E^{*2} + 2\sigma BC(\mu + \sigma p)E^* + B^2[\mu^2 + \sigma p\mu + \sigma^2 p(\mu + p)]\} < 0. \end{aligned}$$

所以 $H'(E^*) < 0$. 即 $H(E^*)$ 是关于 $E^* > 0$ 的单调递减函数.

由

$$[A(\mu + b)E^* + (\mu + p)B][A(\mu + b)\sigma E^* + \mu B] > A(\mu + b)E^*[A(\mu + b)\sigma E^* + (\mu + \sigma p)B]$$

可得 $H(E^*) < \frac{B}{A(\mu + b)E^*} - \frac{B}{A\Lambda}$.

又由

$$\begin{aligned} H(0) &= \frac{B^2(\mu + \sigma p)}{\mu(\mu + p)B^2} - \frac{B}{A\Lambda} = \frac{S^0 + \sigma V^0}{\Lambda} - \frac{B}{A\Lambda} = \frac{B(R^0 - 1)}{A\Lambda}, \\ H\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) &< \frac{B}{A(\mu + b)\frac{\Lambda}{\mu}} - \frac{B}{A\Lambda} = \frac{\mu B}{A(\mu + b)\Lambda} - \frac{B}{A\Lambda} = \frac{-bB}{A(\mu + b)\Lambda} < 0, \end{aligned}$$

及函数 $H(E^*)$ 的单调性可知, 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 方程(6)在区间 $(0, \Lambda/\mu)$ 上存在唯一正根; 当 $\mathcal{R}_0 \leq 1$ 时, 方程(6)在区间 $(0, \Lambda/\mu)$ 上不存在正根. 综上所述, 可得到如下结论.

定理1 对于模型(1), 当 $\mathcal{R}_0 \leq 1$ 时, 只存在一个无病平衡点 $P^0(S^0, V^0, 0, 0, 0)$; 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 除无病平衡点外, 还存在一个地方病平衡点 $P^*(S^*, V^*, E^*, I^*, A^*)$, 其中 E^* 是方程 $H(E^*) = 0$ 的唯一正根,

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{B\Lambda}{A(\mu + b)E^* + (\mu + p)B}, & V^* &= \frac{p\Lambda B^2}{[A(\mu + b)E^* + (\mu + p)B][A(\mu + b)\sigma E^* + \mu B]}, \\ A^* &= \frac{(1 - \theta)b}{\mu + \gamma_2 + \xi} E^*, & I^* &= \frac{b(\xi + \theta\mu + \theta\gamma_2)}{(\mu + \gamma_1)(\mu + \gamma_2 + \xi)} E^*. \end{aligned}$$

注1: 研究平衡点的存在性对模型的动力学分析至关重要, 无病平衡点代表着疾病灭绝的状态, 地方病平衡点代表着疾病一直存在并形成地方病的状态.

3 平衡点的稳定性

本节将对平衡点的全局性态进行分析, 这对于疾病的消亡或者持续具有重要意义, 并为疾病控制提供有力的参考价值. 首先给出疾病消亡平衡点的局部稳定性.

3.1 无病平衡点的局部稳定性

定理2 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 无病平衡点 P^0 局部渐近稳定; 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 无病平衡点 P^0 不稳定.

证明 令 $\omega_1 = \mu + b, \omega_2 = \mu + \gamma_1, \omega_3 = \mu + \gamma_2 + \xi$. 设模型(1)右端在 $P^0(S^0, V^0, 0, 0, 0)$ 处的雅克比矩阵

为 $J(P^0)$, $J(P^0)$ 有 5 个特征根 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, 5)$, 其中 $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -(\mu + p)$, $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ 满足方程

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \beta_1(S^0 + \sigma V^0), \\ a_2 &= \omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_3 - \beta_1(\omega_2 + \omega_3)(S^0 + \sigma V^0) - \beta_2\theta b(S^0 + \sigma V^0) - \beta_3(1 - \theta)b(S^0 + \sigma V^0), \\ a_3 &= \omega_1\omega_2\omega_3 - [\beta_1\omega_2\omega_3 + \beta_2\omega_3\theta b + \beta_2(1 - \theta)b\xi + \beta_3\omega_2(1 - \theta)b](S^0 + \sigma V^0). \end{aligned}$$

当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时,

$$\begin{aligned} &[\beta_1\omega_2\omega_3 + \beta_2b(\xi + \theta\mu + \theta\gamma_2) + \beta_3\omega_2(1 - \theta)b](S^0 + \sigma V^0) < \omega_1\omega_2\omega_3, \\ &[\beta_1\omega_3 + \beta_3(1 - \theta)b](S^0 + \sigma V^0) < \omega_1\omega_3, \quad (\beta_1\omega_2 + \beta_2\theta b)(S^0 + \sigma V^0) < \omega_1\omega_2, \end{aligned}$$

则 $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_2 - \omega_2\omega_3 > 0$ 且 $a_3 > 0$. 而

$$a_1a_2 - a_3 = a_1(a_2 - \omega_2\omega_3) + (\omega_2 + \omega_3)\omega_2\omega_3 + [\beta_2b(\xi + \theta\mu + \theta\gamma_2) + \beta_3\omega_2(1 - \theta)b](S^0 + \sigma V^0) > 0.$$

根据 Routh-Hurwitz 准则, 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, $J(P^0)$ 的所有特征根均为负, 因此无病平衡点 P^0 局部渐近稳定; 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, $a_3 < 0$, 则 $J(P^0)$ 有一个正特征根, 因此无病平衡点 P^0 不稳定.

3.2 无病平衡点的全局稳定性

定理 3 当 $\mathcal{R}_0 \leq 1$ 时, 模型(1)的无病平衡点是全局渐近稳定的.

证明 无病平衡点 $P^0(S^0, V^0, 0, 0, 0)$ 满足下列方程

$$\begin{cases} \Lambda - (\beta_1E + \beta_2I + \beta_3A)S - (\mu + p)S = 0, \\ pS - (\beta_1E + \beta_2I + \beta_3A)\sigma V - \mu V = 0, \end{cases} \quad (7)$$

根据方程(7)可得 $\mu + p = \frac{\Lambda}{S^0}$, $\mu = \frac{pS^0}{V^0}$. 则模型(1)可改写为

$$\begin{cases} S'(t) = S \left[\Lambda \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S^0} \right) - (\beta_1E + \beta_2I + \beta_3A) \right], \\ V'(t) = V \left[p \left(\frac{S}{V} - \frac{S^0}{V^0} \right) - (\beta_1E + \beta_2I + \beta_3A)\sigma \right], \\ E'(t) = (\beta_1E + \beta_2I + \beta_3A)[(S^0 + \sigma V^0) + (S - S^0) + \sigma(V - V^0)] - (\mu + b)E, \\ I'(t) = \theta bE + \xi A - (\mu + \gamma_1)I, \\ A'(t) = (1 - \theta)bE - (\mu + \gamma_2 + \xi)A. \end{cases} \quad (8)$$

构造正定的 Lyapunov 函数

$$L_1 = \left(S - S^0 - S^0 \ln \frac{S}{S^0} \right) + \left(V - V^0 - V^0 \ln \frac{V}{V^0} \right) + E + D_1I + D_2A,$$

其中 $D_1 = \frac{\beta_2(S^0 + \sigma V^0)}{\mu + \gamma_1}$, $D_2 = \frac{[\beta_2\xi + \beta_3(\mu + \gamma_1)](S^0 + \sigma V^0)}{(\mu + \gamma_1)(\mu + \gamma_2 + \xi)}$. L_1 沿着式(8)的全导数为

$$\begin{aligned} L_1' &= \left[\beta_1(S^0 + \sigma V^0) - (\mu + b) + \frac{\beta_3\xi(S^0 + \sigma V^0) + \beta_3(S^0 + \sigma V^0)(\mu + \gamma_2 + \xi)}{(\mu + \gamma_1)(\mu + \gamma_2 + \xi)} \right] (1 - \theta)b \\ &\quad + \frac{\beta_2(S^0 + \sigma V^0)\theta b}{\mu + \gamma_1} \left] E + \Lambda(S - S^0) \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S^0} \right) + p(V - V^0) \left(\frac{S}{V} - \frac{S^0}{V^0} \right) \\ &= (\mu + b)(\mathcal{R}_0 - 1)E + F(S, V), \end{aligned}$$

其中

$$F(S, V) = \Lambda(S - S^0) \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S^0} \right) + p(V - V^0) \left(\frac{S}{V} - \frac{S^0}{V^0} \right) = \Lambda \left(2 - \frac{S^0}{S} - \frac{S}{S^0} \right) + pS^0 \left(\frac{S}{S^0} - \frac{V}{V^0} - \frac{SV^0}{S^0V} + 1 \right).$$

令 $x = \frac{S}{S^0}$, $y = \frac{V}{V^0}$, 则 $F(S, V) = \Lambda \left(2 - x - \frac{1}{x} \right) + pS^0 \left(x - y - \frac{x}{y} + 1 \right) := \bar{F}(x, y)$. 联合式(8), $\bar{F}(x, y)$ 可改写为

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, y) &= (2\Lambda + pS^0) - (\Lambda - pS^0)x - \Lambda \frac{1}{x} - pS^0y - pS^0 \frac{x}{y} \\ &= 3pS^0 + 2\mu S^0 - \mu S^0x - (pS^0 + \mu S^0) \frac{1}{x} - pS^0y - pS^0 \frac{x}{y} \\ &= pS^0 \left(3 - \frac{1}{x} - y - \frac{x}{y} \right) + \mu S^0 \left(2 - x - \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

当 $x, y > 0$ 时, $\bar{F}(x, y) \leq 0$, 当且仅当 $x, y = 1$ 时 $\bar{F}(x, y) = 0$.

综上所述, 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, $L'_1 \leq 0$, 令

$$\Gamma_1 = \left\{ (S, V, E, I, A) \mid \frac{dL_1}{dt} = 0 \right\} = \{ (S, V, E, I, A) \mid E = 0 \}.$$

在 Γ_1 内当 $t \rightarrow \infty$ 时, 容易得到 $S \rightarrow S^0$, $V \rightarrow V^0$, $I \rightarrow 0$, $A \rightarrow 0$, 因此无病平衡点是 Ω_1 中模型(1)的最大 ω 不变集. 由 LaSalle 不变集原理 (LaSalle, 1976) 可知, Ω 内的任何轨线都趋于无病平衡点, 因此无病平衡点全局吸引. 当 $\mathcal{R}_0 = 1$ 时, 令

$$\Gamma_2 = \left\{ (S, V, E, I, A) \mid \frac{dL_1}{dt} = 0 \right\}.$$

在 Γ_2 内当 $t \rightarrow \infty$ 时, 容易得到 $S \rightarrow S^0$, $V \rightarrow V^0$, $E \rightarrow 0$, $I \rightarrow 0$, $A \rightarrow 0$. 因此根据 LaSalle 不变集原理可知无病平衡点全局吸引. 根据马知恩等 (2015) 的定理 3.5 并结合上述结论, 可以得到当 $\mathcal{R}_0 \leq 1$ 时, 无病平衡点全局渐近稳定.

3.3 地方病平衡点的全局稳定性

在第二节已经得出地方病平衡点的存在性, 现探究地方病平衡点的全局稳定性.

定理 4 对于模型(1), 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 地方病平衡点是全局渐近稳定的.

证明 地方病平衡点 $P^*(S^*, V^*, E^*, I^*, A^*)$ 满足方程(3), 记 $x = \frac{S}{S^*}$, $y = \frac{V}{V^*}$, $z = \frac{E}{E^*}$, $u = \frac{I}{I^*}$, $v = \frac{A}{A^*}$.

模型(1)可改写为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left[\frac{\Lambda}{S^*} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) - \beta_1 E^* (z - 1) - \beta_2 I^* (u - 1) - \beta_3 A^* (v - 1) \right], \\ \frac{dy}{dt} = y \left[p \frac{S^*}{V^*} \left(\frac{x}{y} - 1 \right) - \beta_1 \sigma E^* (z - 1) - \beta_2 \sigma I^* (u - 1) - \beta_3 \sigma A^* (v - 1) \right], \\ \frac{dz}{dt} = z \left\{ \beta_1 \left[S^* (x - 1) + \sigma V^* (y - 1) \right] + \frac{\beta_2 I^*}{E^*} \left[S^* \left(\frac{xu}{z} - 1 \right) + \sigma V^* \left(\frac{yu}{z} - 1 \right) \right] \right. \\ \quad \left. + \frac{\beta_3 A^*}{E^*} \left[S^* \left(\frac{xv}{z} - 1 \right) + \sigma V^* \left(\frac{yv}{z} - 1 \right) \right] \right\}, \\ \frac{du}{dt} = u \left[\theta b \frac{E^*}{I^*} \left(\frac{z}{u} - 1 \right) + \xi \frac{A^*}{I^*} \left(\frac{v}{u} - 1 \right) \right], \\ \frac{dv}{dt} = v \left[(1 - \theta) b \frac{E^*}{A^*} \left(\frac{z}{v} - 1 \right) \right]. \end{cases} \quad (9)$$

构造 Lyapunov 函数

$$L_2 = S^*(x - 1 - \ln x) + V^*(y - 1 - \ln y) + E^*(z - 1 - \ln z) + F_1 I^*(u - 1 - \ln u) + F_2 A^*(v - 1 - \ln v).$$

则 L_2 沿模型(9)的全导数为

$$\begin{aligned}
 L'_2 &= S^* \frac{x-1}{x} \frac{dx}{dt} + V^* \frac{y-1}{y} \frac{dy}{dt} + E^* \frac{z-1}{z} \frac{dz}{dt} + F_1 I^* \frac{u-1}{u} \frac{du}{dt} + F_2 A^* \frac{v-1}{v} \frac{dv}{dt} \\
 &= (x-1) \left[\Lambda \left(\frac{1}{x} - 1 \right) - \beta_1 S^* E^* (z-1) - \beta_2 S^* I^* (u-1) - \beta_3 S^* A^* (v-1) \right] + (y-1) \left[p S^* \left(\frac{x}{y} - 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \beta_1 \sigma V^* E^* (z-1) - \beta_2 \sigma V^* I^* (u-1) - \beta_3 \sigma V^* A^* (v-1) \right] + (z-1) \left\{ \beta_1 E^* [S^* (x-1) \right. \\
 &\quad \left. + \sigma V^* (y-1)] + \beta_2 I^* \left[S^* \left(\frac{xu}{z} - 1 \right) + \sigma V^* \left(\frac{yu}{z} - 1 \right) \right] + \beta_3 A^* \left[S^* \left(\frac{xv}{z} - 1 \right) + \sigma V^* \left(\frac{yv}{z} - 1 \right) \right] \right\} \\
 &\quad + F_1 (u-1) \left[\theta b E^* \left(\frac{z}{u} - 1 \right) + \xi A^* \left(\frac{v}{u} - 1 \right) \right] + F_2 (v-1) \left[(1-\theta) b E^* \left(\frac{z}{v} - 1 \right) \right] \\
 &= 2\Lambda + pS^* + F_1 \theta b E^* + F_1 \xi A^* + F_2 (1-\theta) b E^* - x \left(\Lambda - \beta_2 S^* I^* - \beta_3 S^* A^* - pS^* \right) - \Lambda \frac{1}{x} \\
 &\quad - y \left(pS^* - \beta_2 \sigma V^* I^* - \beta_3 \sigma V^* A^* \right) + z \left[-\beta_2 S^* I^* - \beta_2 \sigma V^* I^* - \beta_3 S^* A^* - \beta_3 \sigma V^* A^* + F_1 \theta b E^* \right. \\
 &\quad \left. + F_2 (1-\theta) b E^* \right] + u \left(\beta_2 S^* I^* + \beta_2 \sigma V^* I^* - F_1 \theta b E^* - F_1 \xi A^* \right) + v \left[\beta_3 S^* A^* + \beta_3 \sigma V^* A^* \right. \\
 &\quad \left. + F_1 \xi A^* - F_2 (1-\theta) b E^* \right] - pS^* \frac{x}{y} - \beta_2 S^* I^* \frac{xu}{z} - \beta_2 \sigma V^* I^* \frac{yu}{z} - \beta_3 S^* A^* \frac{xv}{z} - \beta_3 \sigma V^* A^* \frac{yv}{z} \\
 &\quad - F_1 \theta b E^* \frac{z}{u} - F_1 \xi A^* \frac{v}{u} - F_2 (1-\theta) b E^* \frac{z}{v}. \tag{10}
 \end{aligned}$$

在式(10)中, 只有 z , u , v 前面的系数可能为正. 若这些系数为正, 则 L_2 有可能为正, 所以令 z , u , v 前面的系数为 0, 则

$$\begin{cases}
 -\beta_2 S^* I^* - \beta_2 \sigma V^* I^* - \beta_3 S^* A^* - \beta_3 \sigma V^* A^* + F_1 \theta b E^* + F_2 (1-\theta) b E^* = 0, \\
 \beta_2 S^* I^* + \beta_2 \sigma V^* I^* - F_1 \theta b E^* - F_1 \xi A^* = 0, \\
 \beta_3 S^* A^* + \beta_3 \sigma V^* A^* + F_1 \xi A^* - F_2 (1-\theta) b E^* = 0.
 \end{cases} \tag{11}$$

根据方程(11)可以计算得出

$$F_1 = \frac{\beta_2 B}{(\mu + \gamma_1) A}, \quad F_2 = \frac{[\xi \beta_2 + (\mu + \gamma_1) \beta_3] B}{(\mu + \gamma_1)(\mu + \gamma_2 + \xi) A}.$$

因此式(10)可整理成如下两种形式:

(i) 当 $\beta_2 S^* I^* - F_1 \xi A^* \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
 L'_2 &= (\Lambda - \beta_2 S^* I^* - \beta_3 S^* A^* - pS^*) \left(2 - x - \frac{1}{x} \right) + (pS^* - \beta_2 \sigma V^* I^* - \beta_3 \sigma V^* A^*) \left(3 - \frac{1}{x} - y - \frac{x}{y} \right) \\
 &\quad + (\beta_2 S^* I^* - F_1 \xi A^*) \left(3 - \frac{1}{x} - \frac{xu}{z} - \frac{z}{u} \right) + \beta_2 \sigma V^* I^* \left(4 - \frac{1}{x} - \frac{x}{y} - \frac{yu}{z} - \frac{z}{u} \right) \\
 &\quad + \beta_3 S^* A^* \left(3 - \frac{1}{x} - \frac{xv}{z} - \frac{z}{v} \right) + \beta_3 \sigma V^* A^* \left(4 - \frac{1}{x} - \frac{x}{y} - \frac{yv}{z} - \frac{z}{v} \right) + F_1 \xi A^* \left(4 - \frac{1}{x} - \frac{xu}{z} - \frac{z}{v} - \frac{v}{u} \right).
 \end{aligned}$$

(ii) 当 $\beta_2 S^* I^* - F_1 \xi A^* < 0$ 时,

$$\begin{aligned}
 L'_2 &= (\Lambda - \beta_2 S^* I^* - \beta_3 S^* A^* - pS^*) \left(2 - x - \frac{1}{x} \right) + (pS^* - \beta_2 \sigma V^* I^* - \beta_3 \sigma V^* A^*) \left(3 - \frac{1}{x} - y - \frac{x}{y} \right) \\
 &\quad + (F_1 \xi A^* - \beta_2 S^* I^*) \left(5 - \frac{v}{u} - \frac{yu}{z} - \frac{x}{y} - \frac{z}{v} - \frac{1}{x} \right) + F_1 \theta b E^* \left(4 - \frac{1}{x} - \frac{x}{y} - \frac{yu}{z} - \frac{z}{u} \right) \\
 &\quad + \beta_3 S^* A^* \left(3 - \frac{1}{x} - \frac{xv}{z} - \frac{z}{v} \right) + \beta_3 \sigma V^* A^* \left(4 - \frac{1}{x} - \frac{x}{y} - \frac{yv}{z} - \frac{z}{v} \right) + \beta_2 S^* I^* \left(4 - \frac{1}{x} - \frac{xu}{z} - \frac{z}{v} - \frac{v}{u} \right),
 \end{aligned}$$

其中

$$\Lambda - \beta_2 S^* I^* - \beta_3 S^* A^* - pS^* = \beta_1 S^* E^* > 0, \quad pS^* - \beta_2 \sigma V^* I^* - \beta_3 \sigma V^* A^* = \beta_1 \sigma V^* E^* > 0.$$

当 $\beta_2 S^* I^* - F_1 \xi A^* \geq 0$ 时, 根据算数平均数和几何平均数的关系可知, 当 $x > 0$ 时, $2 - x - \frac{1}{x} \leq 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时, $2 - x - \frac{1}{x} = 0$; 当 $x, y > 0$ 时, $3 - \frac{1}{x} - y - \frac{x}{y} \leq 0$, 当且仅当 $x = y = 1$ 时, $3 - \frac{1}{x} - y - \frac{x}{y} = 0$; 当 $x, z, u > 0$ 时, $3 - \frac{1}{x} - \frac{xu}{z} - \frac{z}{u} \leq 0$, 当且仅当 $x = z = u = 1$ 时, $3 - \frac{1}{x} - \frac{xu}{z} - \frac{z}{u} = 0$; 当 $x, y, z, u > 0$ 时, $4 - \frac{1}{x} - \frac{x}{y} - \frac{yu}{z} - \frac{z}{u} \leq 0$, 当且仅当 $x = y = z = u = 1$ 时, $4 - \frac{1}{x} - \frac{x}{y} - \frac{yu}{z} - \frac{z}{u} = 0$; 当 $x, z, v > 0$ 时, $3 - \frac{1}{x} - \frac{xv}{z} - \frac{z}{v} \leq 0$, 当且仅当 $x = z = v = 1$ 时, $3 - \frac{1}{x} - \frac{xv}{z} - \frac{z}{v} = 0$; 当 $x, y, z, v > 0$ 时, $4 - \frac{1}{x} - \frac{x}{y} - \frac{yv}{z} - \frac{z}{v} \leq 0$, 当且仅当 $x = y = z = v = 1$ 时, $4 - \frac{1}{x} - \frac{x}{y} - \frac{yv}{z} - \frac{z}{v} = 0$; 当 $x, z, u, v > 0$ 时, $4 - \frac{1}{x} - \frac{xu}{z} - \frac{z}{v} - \frac{v}{u} \leq 0$, 当且仅当 $x = z = u = v = 1$ 时, $4 - \frac{1}{x} - \frac{xu}{z} - \frac{z}{v} - \frac{v}{u} = 0$.

当 $\beta_2 S^* I^* - F_1 \xi A^* < 0$ 时, 当 $x, y, z, u, v > 0$ 时, $5 - \frac{v}{u} - \frac{yu}{z} - \frac{x}{y} - \frac{z}{v} - \frac{1}{x} \leq 0$, 当且仅当 $x = y = z = u = v = 1$ 时, $5 - \frac{v}{u} - \frac{yu}{z} - \frac{x}{y} - \frac{z}{v} - \frac{1}{x} = 0$. 所以当 $x, y, z, u, v > 0$ 时, $L'_2 \leq 0$, 当且仅当 $x = y = z = u = v = 1$ 时, $L'_2 = 0$. 模型(1)在 $\{(x, y, z, u, v) | L'_2 = 0\}$ 中的最大不变集为 $(1, 1, 1, 1, 1)$. 由不变集原理可知, 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 模型(1)的地方病平衡点是全局渐近稳定的, 证毕.

4 模型应用

本节将根据模型(1)的特点, 选取江苏省近十五年的腮腺炎数据(见表1), 对其进行模型应用.

4.1 数据选取

当前, 流行性腮腺炎在世界卫生组织区域一直存在, 成为全球性的传染病. 本节将根据中国疾病预防控制中心的监测数据及世卫组织报道, 得到江苏省2004—2018年的新发腮腺炎患者病例数(表1和图2).

表1 江苏省2004—2018年报告新发腮腺炎病例数

Table 1 Number of new cases of mumps reported in Jiangsu Province from 2004 to 2018

年份	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
人数	10 028	9 111	9 326	10 824	14 004	10 134	5 557	8 893
年份	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	
人数	19 131	19 281	8 149	5 990	5 038	5 959	7 877	

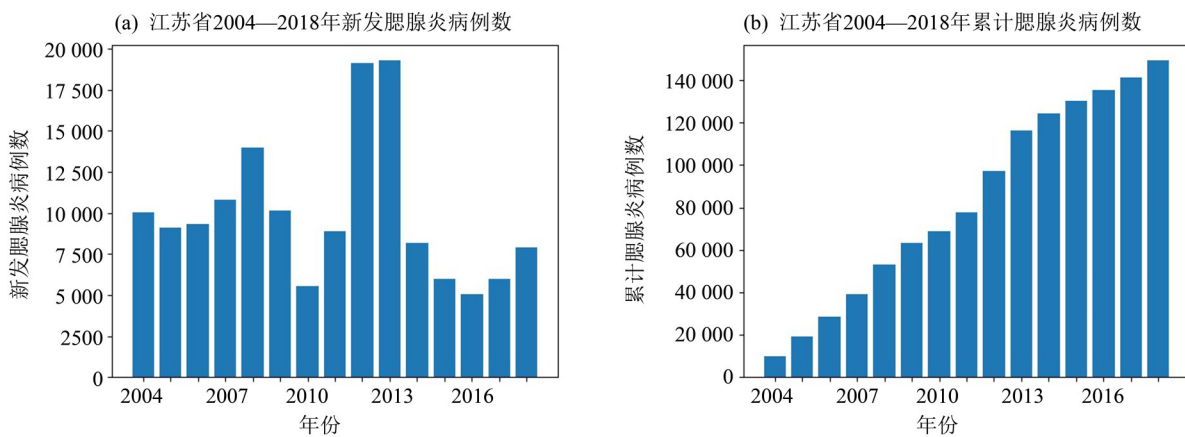


图2 江苏省2004—2018年腮腺炎病例数情况
Fig. 2 Cases of mumps in Jiangsu Province from 2004 to 2018

4.2 模型参数估计

江苏省 2004 年年初的人口约为 75 686 046 人, 则可假设 $S(0) = 75\,686\,046$. 江苏省 2004 年人口出生率为 0.009 45, 自然死亡率为 0.007 2, 故 $\Lambda = 75\,686\,046 \times 0.009\,45 \approx 715\,233$. 据江苏省疾病预防控制中心报道腮腺炎潜伏期为 8 至 30 天, 平均 18 天, 因此取 $b = 20$. 对江苏省 2004—2018 年累计腮腺炎病例数采用非线性最小二乘法(LSM)进行数据拟合(图 3), 得到参数值(表 2).

对于实际数据和拟合数据的误差分析, 我们使用了均方根误差这一指标来衡量, 根据公式 $RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - f(x_i))^2}$, 计算所得 $RMSE = 21.890\,637\,268\,019\,404$, 通过观察收集到的数据, 可以看出该值比较小, 说明模型拟合的准确性较为可靠, 对今后的新发病有一定的参考价值.

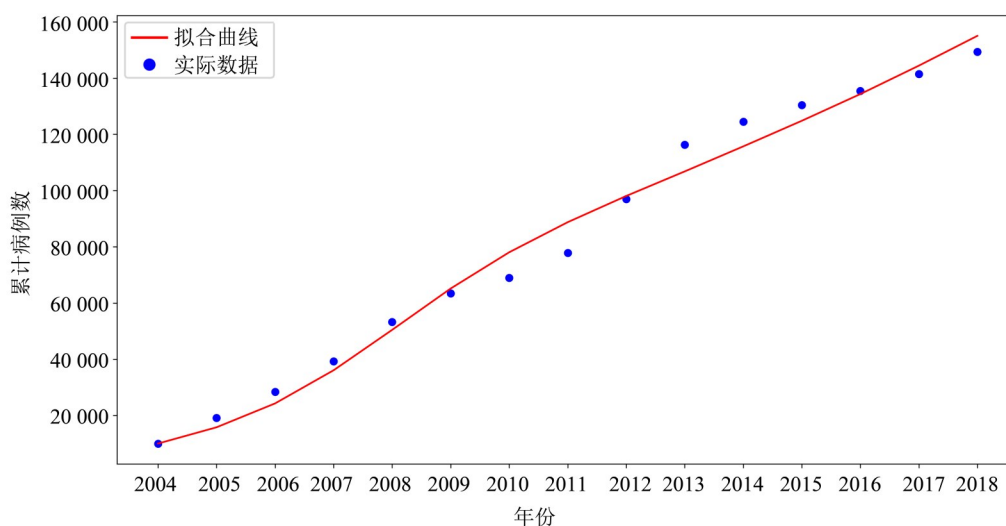


图 3 2004—2018 年累计腮腺炎病例数与模型拟合数据的对比

Fig. 3 Comparison between the cumulative number of mumps cases and the fitting data of model from 2004 to 2018

表 2 模型的参数值

Table 2 The parameter values of the model

参数	含义	参数值
$S(0)$	初始易感者人数	75 686 046
$I(0)$	有症状的初始患病人数	10 028
β_1	与潜伏者接触的传染率	7×10^{-9}
β_2	与有症状感染者接触的传染率	6.56×10^{-7}
β_3	与无症状感染者接触的传染率	4.56×10^{-8}
Λ	江苏省人口的年出生数	715 233
μ	自然死亡率	0.007 2
p	疫苗接种率	0.871 2
σ	接种者感染率调节因子	0.000 3
b	潜伏者转化为感染者的几率	20
θ	潜伏者转化为有症状感染者比例	0.680 3
$1 - \theta$	潜伏者转化为无症状感染者比例	0.319 7
γ_1	有症状感染者恢复率	0.257 8
γ_2	无症状感染者恢复率	0.568 7
ξ	无症状感染者转化为有症状感染者的概率	0.014 3

4.3 腮腺炎发展趋势

2008年中国实行扩大国家免疫规划政策, 政策规定18~24个月龄儿童可免费接种单剂麻腮风(MMR)疫苗, 由于当时国家疫苗产能限制, 因此在全国范围内停止接种加强剂次. 随着一剂MMR疫苗的覆盖率稳步增加, 流行性腮腺炎的发病率在头两年稳步下降, 但在随后的几年中, 免疫不足及缺陷人数增多, 1剂次免疫程序的弊端逐步显现, 国内多地陆续出现腮腺炎爆发、流行情况, 江苏省在2012—2013年也爆发了较长时间的大流行. 为了提高对腮腺炎病毒的免疫力并减少腮腺炎的发病率, 中国几个省份建议儿童接种第二剂MuCV疫苗, 由于较早地对4~6岁儿童接种第二剂MMR疫苗, 腮腺炎病例数量急剧减少(Fu et al., 2022)从2020年7月开始, 中国政府实施了8个月和18个月两剂MMR疫苗接种计划; 然而, 关于两剂MMR方案对腮腺炎发病率影响的数据仍然有限.

使用上述估计参数对腮腺炎数量进行预测(见图4). 从图形的发展趋势看出, 如果不加强控制措施, 未来几年内江苏省的累计腮腺炎病例数会持续增加. 部分因素是公众缺乏对腮腺炎的认知和预防, 下面将分析部分参数对 \mathcal{R}_0 的影响.

4.4 敏感性分析

基本再生数 \mathcal{R}_0 是区分疾病是否流行的阈值, 利用偏秩相关系数(PRCC)分析模型中主要参数对阈值的影响, 以此确定各参数对阈值的影响大小, 从而得到控制疫情的关键因素.

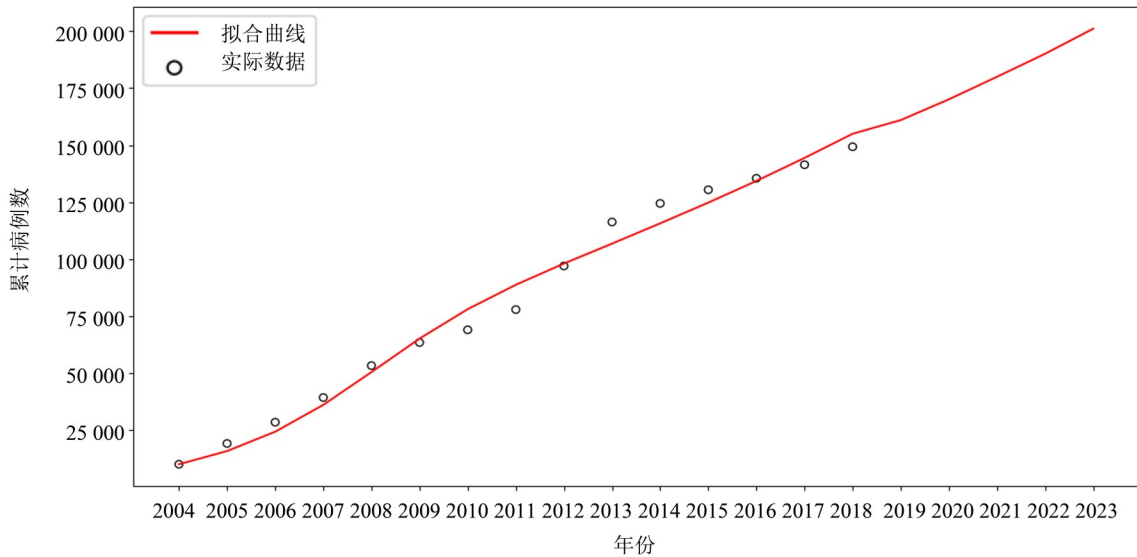


图4 2004—2018年累计腮腺炎病例数预测

Fig. 4 Forecast of number of cumulative mumps cases from 2004 to 2018

PRCC 值为正数表明 \mathcal{R}_0 会随着该参数的增加而增加, PRCC 值为负数表明 \mathcal{R}_0 会随着该参数的增加而减少, 且 PRCC 绝对值的大小表明该参数与 \mathcal{R}_0 的相关性程度. 本文选取9个重要参数 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, p, \theta, \gamma_1, \gamma_2, \sigma, \xi$ 进行敏感性分析. 根据图5结果表明: $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2, \sigma, \xi$ 与 \mathcal{R}_0 成正相关, p, θ, γ_1 与 \mathcal{R}_0 成负相关, 并且 β_2 与 p 对 \mathcal{R}_0 的影响最为明显, 因此可以通过减少易感者与腮腺炎病毒携带者之间的接触率、加强疫苗的接种率、增加有症状感染者恢复率来减小基本再生数, 从而控制腮腺炎的进一步蔓延.

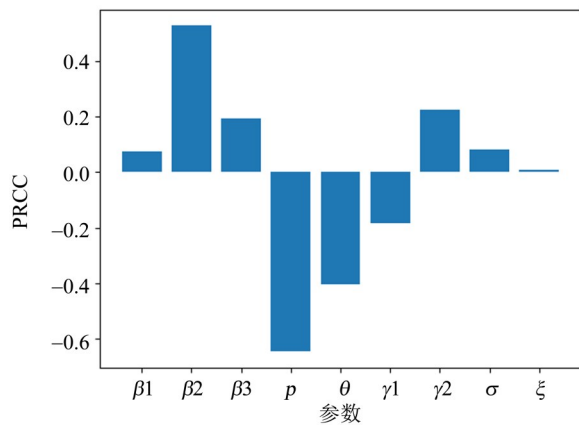


图5 部分相关系数的影响分析

Fig. 5 Impact analysis of partial correlation coefficients

虽然减少易感者与腮腺炎病毒携带者的接触、及时治疗可以显著降低疾病的传播,但有一部分感染者是无症状的,大多数感染者并不能感知到他们接触了病毒.而接种可以通过产生保护性抗体、灭杀病毒从而有效减少病毒感染人体,下面将考虑参数 p 对腮腺炎病例数的影响.

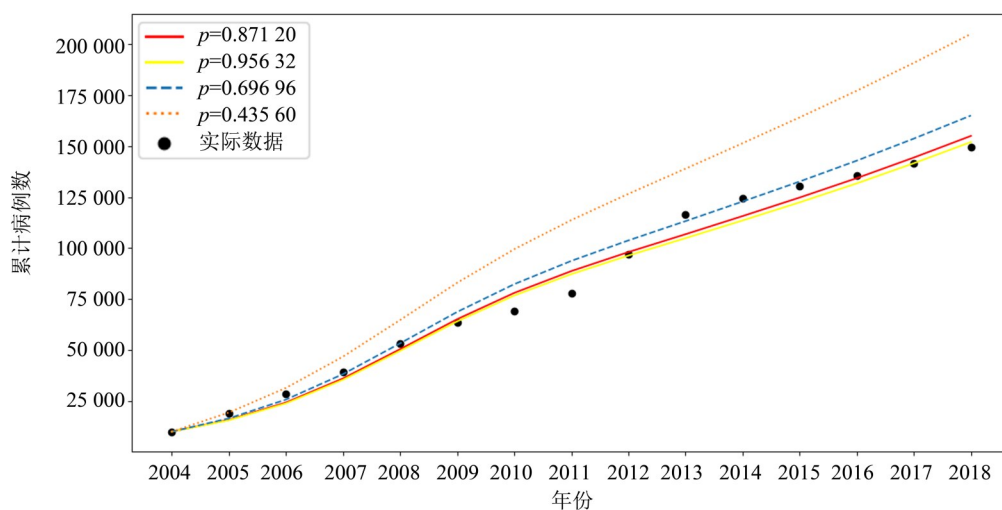


图6 腮腺炎疫情随 p 变化的规律

Fig. 6 The regularity of mumps epidemic with p

从图6能够看出,随着接种率 p 的增加,腮腺炎累计病例数在不断减少,并且随着时间的推移, p 对累计病例数的影响将逐渐明显.因此制定有效的疫苗接种策略以及扩大疫苗接种范围与剂次是控制疫情蔓延的有效方式.

5 结 语

腮腺炎作为全球广泛流行的传染病,目前已有疫苗进行预防,但仍在季节交替期间频繁爆发,因此对腮腺炎的防控仍是全球关注的重大公共卫生问题之一.为了探究腮腺炎的动力学传播性态,本文建立了一类具有疫苗接种且潜伏期传染的SVEIAR腮腺炎传染病模型.首先利用理论分析给出了无病平衡点和地方病平衡点的存在性和稳定性,紧接着通过腮腺炎模型模拟江苏省2004—2018年腮腺炎累计病例数,预测了腮腺炎病例数的发展趋势.结果显示,如果不加强控制措施,短时间内腮腺炎病例数将持续增长.最后,对模型中的主要参数进行敏感性分析,以此探究其对 \mathcal{R}_0 的影响,从而获得一些有效的控制措施,从分析结果得出传染率、疫苗接种率、潜伏者转化为有症状感染者比例对 \mathcal{R}_0 的影响显著.因此,卓有成效的控制措施包括增强公众对腮腺炎的认知程度、与患者保持安全距离等.发放宣传手册、媒体宣传报道等举措有助于公众了解腮腺炎的发病机制和传播机理,降低人群与病患的接触率.通过理论方法拟合,按照江苏省目前的数据,我们可以发现疫苗对腮腺炎有着非常显著的影响,尤其当疫苗接种率达到90%左右,对确诊病例数的影响最为明显,因此制定有效的疫苗接种策略、扩大疫苗接种范围与剂次、推广2剂MMR疫苗免费接种覆盖面,将目前流行的所有基因型考虑在内从而研制更加有效的疫苗试剂,延长疫苗接种的有效期可以更好地控制腮腺炎的流行发展.从模型的研究结果可以得出以上的控制措施对防控腮腺炎都行之有效,同时契合世界卫生组织在腮腺炎疫苗立场文件中提到的全球累积经验,文件中表明要达到对腮腺炎的长期免疫保护需要接种2剂疫苗.

但在实际生活中,由于腮腺炎具有潜伏期,因此在模型中考虑时滞因素更加贴合实际.其次,有相当一部分腮腺炎患者会被隔离进行系统治疗,而这些隔离者与未被隔离的患者感染率是不相同的,因此对隔离者分仓室单独考虑是非常必要的.此外,不同区域的腮腺炎患者人数以及传播速率都是有所差异的,并且随着经济发展和医疗水平提高,患者会前往各地进行治疗,人口迁移会使疾病四处扩散,因此在斑块区域环境中的传染病模型是线性微分方程中的热点问题,很多学者也提出了研究种群迁移对传播疾病

影响的模型(康月月,2020).查阅相关文献后,发现腮腺炎在区域之间进行传播时,本文的方法仍然适用,并且只需构造出合适的Lyapunov函数,即可证明平衡点的全局稳定性.在数值模拟过程中设置合适的参数,考虑多区域疾病感染情况,结合模型得出的理论结果,会得到更加真实有效的防控措施.这些因素将在未来的工作中逐一考虑.

参考文献:

- 盖相臻,2023.利用断点回归分析COVID-19疫情防控政策对济南地区儿童传染病发病及就诊趋势的影响[D].济南:山东大学.
- 高文哲,雒志学,2022.具有双接种的病毒变异传染病模型稳定性分析[J].重庆理工大学学报(自然科学),36(11):266-273.
- 康月月,2020.两类多斑块下传染病模型的稳定性分析[D].兰州:兰州大学.
- 马知恩,周义仓,李承治,2015.常微分方程定性方法与稳定性方法[M].第二版,北京:科学出版社.
- 殷秀岩,李丽娜,2023.流行性腮腺炎的流行病学特征、发病趋势与防控措施[J].中国冶金工业医学杂志,40(2):189-190.
- ANDERSON R M, CROMBIE J A, GRENFELL B T, 1987. The epidemiology of mumps in the UK: A preliminary study of virus transmission, herd immunity and the potential impact of immunization[J]. *Epidemiol Infect*, 99(1): 65-84.
- ATTAULLAH A, KHURSHAID A, ZEESHAN Z, et al, 2022. Computational framework of the SVIR epidemic model with a non-linear saturation incidence rate[J]. *Axioms*, 11(11): 651.
- BAI Y Z, WANG X J, GUO S B, 2021. Global stability of a mumps transmission model with quarantine measure[J]. *Acta Math Appl Sin*, 37(4): 665-672.
- DONAGHY M, CAMERON J C, FRIEDERICH S V, 2006. Increasing incidence of mumps in Scotland: Options for reducing transmission[J]. *J Clin Virol*, 35(2): 121-129.
- DURU E C, ANYANWU M C, 2023. Mathematical model for the transmission of mumps and its optimal control[J]. *Biom Lett*, 60(1): 77-95.
- ECKALBAR J C, ECKALBAR W L, 2015. Dynamics of an SIR model with vaccination dependent on past prevalence with high-order distributed delay[J]. *Biosystems*, 129: 50-65.
- FANOY E B, CREMER J, FERREIRA J A, et al, 2011. Transmission of mumps virus from mumps-vaccinated individuals to close contacts[J]. *Vaccine*, 29(51): 9551-9556.
- FU X, GE M, XU W, et al, 2022. Epidemiological features and sociodemographic factors associated with mumps in mainland China from 2004 to 2018[J]. *J Med Virol*, 94(10): 4850-4859.
- LASALLE J P, 1976. The stability of dynamical systems[M]. Berlin: Hamilton Press.
- MOHANA A, BAR O, PORAT BEN AMY D, et al, 2023. Key findings and experience in the management of juvenile recurrent parotitis with sialoendoscopies—A retrospective study[J]. *Appl Sci*, 13(19): 10780.
- RUBIN S, ECKHAUS M, RENNICK L J, et al, 2015. Molecular biology, pathogenesis and pathology of mumps virus[J]. *J Pathol*, 235(2): 242-252.
- SCHERER A, McLEAN A, 2002. Mathematical models of vaccination[J]. *Br Med Bull*, 62(1): 187-199.
- SEPULVEDA G, ARENAS A J, GONZÁLEZ-PARRA G, 2023. Mathematical modeling of COVID-19 dynamics under two vaccination doses and delay effects[J]. *Mathematics*, 11(2): 369.
- SU S B, CHANG H L, CHEN A K, 2020. Current status of mumps virus infection: Epidemiology, pathogenesis, and vaccine[J]. *Int J Environ Res Public Health*, 17(5): 1686.
- van den DRIESSCHE P, WATMOUGH J, 2002. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. *Math Biosci*, 180: 29-48.
- VIJAYALAKSHMI G M, ROSELYN B P, 2023. Vaccination control measures of an epidemic model with long-term memristive effect[J]. *J Comput Appl Math*, 419: 114738.